고급수리 논술

제1강

수학적귀납법의 구조

① 연역법과 귀납법

등비수열 1, 3, 9, 27, 81, ⋯, 3^{n-1}, ⋯ 의 합을 구하는 경우, 합의 공식을 쓰지 않고도 다음 방법으로 합을 얻을 수 있다.

첫째항 $1=\frac{1}{2}(3^1-1)$

둘째항까지의 합 $1+3=\frac{1}{2}(3^2-1)$

셋째항까지의 합 $1+3+9=\frac{1}{2}(3^3-1)$

⋮

제 n항까지의 합 $1+3+9+27+\cdots+3^{n-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$

이와 같이 몇 가지의 구체적인 경우에서 시작하여 일반적인 경우에 대한 결론을 유도하는 것을 '귀납법' 이라고 한다.

논리적인 추론의 방법에는 연역법과 귀납법이 있다.
구체적인 명제로부터 추상적인 명제로, 또는 특수한 명제로부터 일반적인 명제로 추론을 진행시키는 것을 귀납법(induction)이라고 한다.
이와 반대로 참인 명제로부터 특수한 명제로 또는 추상적인 명제로부터 구체적인 명제로 추론을 진행시키는 것을 연역법 (deduction)이라 한다. 그 예로는 삼단논법이 있다.

② 수학적 귀납법

앞에서 제 n항까지의 합이 $1+3+9+27+\cdots+3^{n-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$임을 귀납적으로 추론했다. 그런데 이 식이 모든 자연수 n에 대하여 성립한다고 할 수 있을까?
이 식에 아무리 많은 자연수를 대입하더라도 그것은 이 식이 성립하는 몇 가지 예를 들어 보인 것에 지나지 않는다. 그러나 이 식이
"$n=1$일 때 성립" 함을 보여주고,
"$n=k$일 때 성립한다면 $n=k+1$일 때도 성립"함을 보여준다면
$n=1$일 때 성립하므로 $n=2$일 때도 성립한다.
$n=2$일 때 성립하므로 $n=3$일 때도 성립한다.
$n=3$일 때 성립하므로 $n=4$일 때는 성립한다.
⋮

따라서 모든 자연수 n에 대하여 성립함이 증명된다. 이와 같은 증명법을 가리켜 '수학적 귀납법'이라고 한다.

모든 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 증명하면 된다. i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$에 성립한다. ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

③ 수학적 귀납법의 논리구조

수학적 귀납법은 귀납추리를 이어가는 논리적 형태에 따라 다음과 같은 여러 가지 유형이 있을 수 있다. 수학적 귀납법이 성립하는 가장 큰 이유 중에 하나는 모든 자연수를 순서대로 정렬할 수 있기 때문이다.

여러 유형의 수학적 귀납법 중에 다음 네 가지 유형의 수학적 귀납법을 소개한다. (지금 소개하는 유형 외에도 다양한 형태의 수학적 귀납법 유형이 존재한다.)

(1) 자연수 n에 대하여 정의된 명제 P(n)이 다음을 만족하면 모든 자연수 n에 대하여 P(n)은 참이다.

i) P(1)이 참이다.

ii) 1 보다 큰 자연수 k에 대하여 P(k)가 참이면 P(k+1)도 참이다.

(2) 자연수 n에 대하여 정의된 명제 P(n)이 다음을 만족하면 모든 자연수 n에 대하여 P(n)은 참이다.

i) P(1)이 참이다.

ii) P(2)가 참이다.

iii) 1보다 큰 자연수 k에 대하여 P(k), P(k+1)이 참이면 P(k+2)도 참이다.

(3) 자연수 n에 대하여 정의된 명제 P(n)이 다음을 만족하면 모든 자연수 n에 대하여 P(n)은 참이다.

i) P(1)이 참이다.

ii) 1보다 큰 자연수 k에 대하여 P(1), P(2), ⋯, P(k)가 참이면 P(k+1)도 참이다.

(4) 자연수 n에 대하여 정의된 명제 P(n)이 다음을 만족하면 $n \ge m$인 자연수 n에 대하여 P(n)은 참이다.

i) 어떤 자연수m에 대하여 P(m)이 참이다.

ii) $m \le k$인 자연수 k에 대하여 P(k)가 참이면 P(k+1)도 참이다.

※ (교과서 탐구활동) 티테우스 보데 법칙

소행성군은 태양계의 화성궤도와 목성궤도 사이에서 태양 주위를 돌고 있는 작은 천체들을 말한다. 소행성은 크기가 대단히 작기 때문에 맨눈으로 볼 수 없어서 1800년 이후에나 알려지게 된다. 최초의 소행성은 피아치가 1801년에 발견한 세레스(Ceres)이다. 이 발견에 결정적인 역할을 한 것은 티티우스-보데의 법칙인데, 이것은 독일의 천문학자인 보데가 행성의 태양으로부터의 거리가 어떤 규칙을 가진다는 티티우스의 발견을 1772년 발표한 것이다. 보데와 티티우스가 활동할 당시 알려진 태양계의 행성은 수성, 금성, 지구, 화성, 목성, 토성이다. 그리고 태양으로부터 그 행성들까지의 거리는 다음 표와 같다고 한다.

행성	수성	금성	지구	화성	목성	토성
거리(AU)	0.4	0.7	1	1.6	5.2	10.0
티티우스-보데의 법칙	4	7	10	16	52	100
	0	3	6	12	48	96
	0	1	2	4	16	32

여기서 AU는 태양과 지구사이의 거리(약 1억5천만Km)를 기준으로 한 천문단위이다.

(1) 위의 표에서 티티우스-보데의 법칙을 설명해보고 위 규칙에 의하면, 태양으로부터 소행성군까지의 거리는 몇 AU가 되는지 설명하시오.

(2) 새로운 행성이 있을 만한 곳을 티티우스-보데의 법칙에 의거하여 설명하시오.

W1. (고려대 2013학년도)

수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 2}{a_n}$을 만족하고 첫째항이 $\dfrac{5}{3}$인 수열이다. 이 수열의 일반항을 구하시오.

W2. 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여 다음과 같이 주어질 때, 물음에 답하시오.

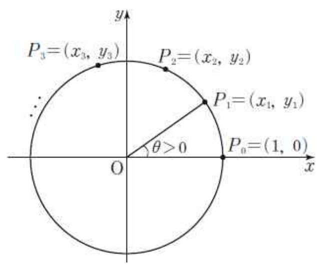
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}$$

(1) a_{n+2}를 a_n 과 a_{n+1} 를 이용하여 나타내시오.

(2) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 유리수임을 증명하시오.

W3. (서울시립대 2012학년도)

(가) 점 $P_0 = (1,0)$에서 출발하여 중심이 원점인 단위 원 위에 일정한 간격으로 점 $P_1, P_2, P_3, \cdots$을 그림과 같이 반시계 방향으로 표시해 나간다. 이때, $P_n = (x_n, y_n)$이라고 하자.(단, n은 자연수)



(나) 다음 식이 성립한다.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

(1) x_1을 사용하여 x_2, x_3을 표현하시오.

(2) 임의의 n에 대하여 $x_n = f_n(x_1)$을 만족하는 n차 다항식 $f_n(x)$가 존재함을 보이시오.

실전 1. 다음 물음에 답하시오.

(가) 수학적 귀납법은 귀납추리를 이어가는 논리적 형태에 따라 다음과 같은 여러 가지 유형이 있을 수 있다.

(1) 자연수 n에 대하여 정의된 명제 P(n)이 다음을 만족하면 모든 자연수 n에 대하여 P(n)은 참이다.
  i) P(1)이 참이다.
  ii) 1 보다 큰 자연수 k에 대하여 P(k)가 참이면 P(k+1)도 참이다.

(2) 자연수 n에 대하여 정의된 명제 P(n)이 다음을 만족하면 모든 자연수 n에 대하여 P(n)은 참이다.
  i) P(1)이 참이다.
  ii) P(2)가 참이다.
  iii) 1보다 큰 자연수 k에 대하여 P(k), P(k+1)이 참이면 P(k+2)도 참이다.

(3) 자연수 n에 대하여 정의된 명제 P(n)이 다음을 만족하면 모든 자연수 n에 대하여 P(n)은 참이다.
  i) P(1)이 참이다.
  ii) 1보다 큰 자연수 k에 대하여 P(1), P(2), ⋯, P(k)가 참이면 P(k+1)도 참이다.

(4) 자연수 n에 대하여 정의된 명제 P(n)이 다음을 만족하면 $n \geq m$인 자연수 n에 대하여 P(n)은 참이다.
  i) 어떤 자연수m에 대하여 P(m)이 참이다.
  ii) $m \leq k$인 자연수 k에 대하여 P(k)가 참이면 P(k+1)도 참이다.

(나) 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같이 나타낸다.

식 $(a+b)^n$을 전개할 때 n개의 인수 $a+b$에서 b를 하나도 택하지 않는 경우부터 n개 모두 b를 택하는 경우까지 가능하다. 따라서 전개식에서 나타날 수 있는 항은 $a^n b^0$, $a^{n-1}b^1$, $a^{n-2}b^2$, $\cdots$, $a^0 b^n$ 과 같이 $n+1$가지이다.

또, 식 $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항 $a^{n-r}b^r$ (단, $r=0,\ 1,\ \cdots,\ n$) 이 나타나는 경우는 n개의 인수 $a+b$ 중에서 r개의 인수에서는 b를 택하고 $n-r$개의 인수에서는 a를 택하여 곱하는 경우이다. 따라서 $a^{n-r}b^r$이 나타나는 횟수는 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$이다. 그러므로 식 $(a+b)^n$의 전개식은 다음과 같다,

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0\,\mathrm{a}^{\mathrm{n}} + {}_n\mathrm{C}_1\,\mathrm{a}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{b} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r\,\mathrm{a}^{\mathrm{n}-\mathrm{r}}\mathrm{b}^{\mathrm{r}} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\,\mathrm{b}^{\mathrm{n}} = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\,\mathrm{a}^{\mathrm{n}-\mathrm{r}}\mathrm{b}^{\mathrm{r}}$$

다음 식에 의해 정해지는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$a_1 = 1, \quad \frac{2^n}{n!} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

이 수열의 일반항을 구하고, 그 논리적 근거를 제시하시오.

실전 2. 다음 물음에 답하시오.

(연세대 2020학년도)
10점/100점. 15분/150분

합성함수를 다음과 같이 표기하자.

$$f(x)=f^{\langle 1\rangle}(x),\quad f\circ f(x)=f^{\langle 2\rangle}(x),\quad f\circ f\circ\cdots\circ f(x)=f^{\langle n\rangle}(x)(n\text{번 합성})$$

편의를 위해 $f^{\langle 0\rangle}(x)=x$, $f^{\langle n\rangle}(x)=f^{\langle n\rangle}$로 쓴다. $f(x)=\ln x$라 할 때,

$\displaystyle\int\frac{f^{\langle n\rangle}(x)}{f^{\langle 0\rangle}f^{\langle 1\rangle}f^{\langle 2\rangle}\cdots f^{\langle n-2\rangle}}dx$을 $f^{\langle i\rangle}(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ ,\ n)$로 표현하시오.

실전 3. 다음 물음에 답하시오.

(이화여대 2020학년도 모의)
30점/100점. 30분/100분

(1) 수학적 귀납법을 이용하여 n이 자연수이고 x가 -1보다 같거나 큰 실수이면 다음의 부등식이 성립함을 보이시오.

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

(2) n이 1보다 큰 홀수이고 $x \geq -2$이면 다음이 성립함을 보이시오.

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

(3) $x > -1$이면 다음이 성립함을 보이시오.

$$0 < r < 1 \text{ 이면 } (1+x)^r \leq 1+rx,$$
$$r < 0 \text{ 또는 } r > 1 \text{ 이면 } (1+x)^r \geq 1+rx$$

실전 4. 다음 물음에 답하시오.

다음 명제 $P(n)$이 성립함을 보이기 위한 다음 질문에 답하시오.

> n개의 양의 실수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$에 대하여
>
> $$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n} \qquad (n \geq 2)$$

(1) $P(2)$이 성립함을 보여라.

(2) $P(k)$이 성립하면, $P(2k)$성립함을 보여라.

(3) $P(k+1)$이 성립하면, $P(k)$이 성립함을 보여라.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 증명하면 된다.

i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$에 성립한다.

ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(나) $S>1$이면 $S^{2m}>m+1$인 자연수 m이 존재한다.

왜냐하면, 만일 모든 자연수 m에 대해 $S^{2m} \le m+1$이라면,

즉 모든 자연수 m에 대해 $\dfrac{1}{S^{2m}} \ge \dfrac{1}{m+1}$이라면 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{S^{2k}}$은 수렴하지만 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$은 발산하므로 모순이 생긴다.

(1) 모든 자연수 n에 대해 $x \ge -1$이면 다음의 부등식이 성립함을 보이시오.

$$(1+x)^n \ge 1+nx$$

(2) 모든 자연수 n에 대해 $-2 \le x < -1$일 때도 다음이 성립함을 보이시오.

$$(1+x)^n \ge 1+nx$$

(3) 제시문 (나)를 참고하여 부등식

$$(1+x)^n \ge 1+nx$$

이 모든 자연수 n에 대해 성립하는 x의 범위는 $x \ge -2$ 임을 보이시오.

Note

W1.

(sol1) $a_{n+1}=\dfrac{3a_n-2}{a_n}$ 으로부터 $a_{n+1}-1=\dfrac{3a_n-2}{a_n}-1=\dfrac{2(a_n-1)}{a_n}$,

$a_{n+1}-2=\dfrac{3a_n-2}{a_n}-2=\dfrac{a_n-2}{a_n}$

를 얻는다. 두 식을 나누면 $\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-2}=2\left(\dfrac{a_n-1}{a_n-2}\right)$ 를 얻는다. $A_n=\dfrac{a_n-1}{a_n-2}$이라 하면 $A_{n+1}=2A_n$이므로 $A_n=2^{n-1}A_1$임을 안다. $A_1=\dfrac{a_1-1}{a_1-2}=-2$이므로 $\dfrac{a_n-1}{a_n-2}=A_n=2^{n-1}A_1=-2^n$ 으로부터 $a_n=\dfrac{1+2^{n+1}}{1+2^n}$을 구한다.

(sol2) 귀납적 추론 후 수학적 귀납법으로 증명.

W2.

(1) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\alpha$, $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=\beta$라 하면 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$ 이므로 α, β 는 $t^2-t-\dfrac{1}{2}=0$ 의 두 근이다.

$\therefore\ \alpha^2=\alpha+\dfrac{1}{2}$, $\beta^2=\beta+\dfrac{1}{2}$ ⋯⋯ ①

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\alpha^n-\beta^n)$ 이므로 $a_{n+2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\alpha^n\alpha^2-\beta^n\beta^2)$ ⋯⋯ ②

②에 ① 을 대입하면 $a_{n+2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left\{\alpha^n(\alpha+\dfrac{1}{2})-\beta^n(\beta+\dfrac{1}{2})\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\alpha^n-\beta^n)=a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n$

(2) 수학적 귀납법을 이용하여 증명하면

i) $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=1$

ii) $a_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}=1$

iii) a_k, a_{k+1}가 유리수라 가정하면 $a_{k+2}=a_{k+1}+\dfrac{1}{2}a_k$도 유리수이다.(유리수는 덧셈에 대하여 닫혀 있으므로)

즉 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}$은 모든 자연수 n에 대하여 유리수이다.

W3. (서울시립대 2012)

(1) $x_1=\cos\theta$, $y_1=\sin\theta$이고

$x_2=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=2x_1^2-1$

$x_3=x_1\cos2\theta-y_1\sin2\theta=\cos\theta\cos2\theta-\sin\theta\sin2\theta=\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4x_1^3-3x_1$ 가 된다.

(2) 수학적귀납법을 이용해보자.

(ⅰ) $n=1$: $f_1(x_1)=x_1$이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=2$: $f_2(x_1)=x_2=2x_1^2-1$이므로 성립한다.

(ⅲ) $n=k-1$일 때와 $n=k$일 때 성립한다고 가정하자.

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=\cos\theta\cos(k\theta)-\sin\theta\sin(k\theta)\\&=\cos\theta\cos(k\theta)-\sin\theta\sin(k\theta)+\cos\theta\cos(k\theta)-\cos\theta\cos(k\theta)\\&=2\cos\theta\cos(k\theta)-\sin\theta\sin(k\theta)-\cos\theta\cos(k\theta)\\&=2\cos\theta\cos(k\theta)-\cos((k-1)\theta)\end{aligned}$$

이며, 최고차는 $\cos\theta\cos(k\theta)$의 차수이므로 $k+1$차의 다항식이 된다.
i), ii), iii)에 의해 $f_n(x_1)$는 x_1의 n차 다항식이다.

실전

$n=1$을 대입하면 $a_2=1$임을 안다.

$n=2$를 대입하면 $a_3=\frac{1}{2}$임을 안다.

$n=3$을 대입하면 $a_4=\frac{1}{6}$임을 안다.

$n=4$를 대입하면 $a_5=\frac{1}{24}$임을 안다.

이를 통해 $a_n=\frac{1}{(n-1)!}$임을 귀납적으로 추론할 수 있다.

이제 이를 수학적 귀납법으로 증명하자.

i) $n=1$일 때 $a_1=1=\frac{1}{0!}$이므로 성립한다.

ii) $n=1,2,\cdots,i$일 때 $a_n=\frac{1}{(n-1)!}$이 성립한다고 가정하면 $n=i+1$일 때도 성립함을 알 수 있다.

따라서 모든 자연수 n에 대해 성립한다.

실전 (연세대 2020)

(sol1) $\frac{d}{dx}f^{\langle n-1\rangle}=\frac{d}{dx}\ln f^{\langle n-2\rangle}=\frac{1}{f^{\langle n-2\rangle}}\frac{d}{dx}f^{\langle n-2\rangle}=\cdots=\frac{1}{f^{\langle n-2\rangle}f^{\langle n-3\rangle}\cdots f^{\langle 1\rangle}f^{\langle 0\rangle}}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int\frac{f^{\langle n\rangle}}{f^{\langle 0\rangle}f^{\langle 1\rangle}f^{\langle 2\rangle}\cdots f^{\langle n-2\rangle}}dx&=\int f^{\langle n\rangle}\cdot\frac{d}{dx}f^{\langle n-1\rangle}dx\\&=f^{\langle n\rangle}f^{\langle n-1\rangle}-\int\frac{d}{dx}f^{\langle n\rangle}\cdot f^{\langle n-1\rangle}dx\\&=f^{\langle n\rangle}f^{\langle n-1\rangle}-\int\frac{1}{f^{\langle n-1\rangle}}\cdot\frac{d}{dx}f^{\langle n-1\rangle}\cdot f^{\langle n-1\rangle}dx\\&=f^{\langle n\rangle}f^{\langle n-1\rangle}-f^{\langle n-1\rangle}+C\end{aligned}$$

(sol2) 수학적귀납법을 이용하여 2이상인 모든 자연수 n에 대해

$\int\frac{f^{\langle n\rangle}}{f^{\langle 0\rangle}f^{\langle 1\rangle}f^{\langle 2\rangle}\cdots f^{\langle n-2\rangle}}dx=f^{\langle n\rangle}f^{\langle n-1\rangle}-f^{\langle n-1\rangle}+C$ 임을 보이자.

i) $n=2$일 때 성립함을 보이자. $\int\frac{f^{\langle n\rangle}}{f^{\langle 0\rangle}}dx=\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx$ 에서 $\ln x=t$로 치환하면

$$\int\frac{f^{\langle n\rangle}}{f^{\langle 0\rangle}}dx=\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx=\int\ln t\,dt=t\ln t-t+C=\ln x\ln(\ln x)-\ln x+C=f^{\langle 2\rangle}f^{\langle 1\rangle}-f^{\langle 1\rangle}+C$$

ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 성립함을 보이자.

$\int\frac{f^{\langle k\rangle}}{f^{\langle 0\rangle}f^{\langle 1\rangle}f^{\langle 2\rangle}\cdots f^{\langle k-2\rangle}}dx=f^{\langle k\rangle}f^{\langle k-1\rangle}-f^{\langle k-1\rangle}+C$ 가 성립한다고 가정하면

$$\int\frac{f^{\langle k+1\rangle}}{f^{\langle 0\rangle}f^{\langle 1\rangle}f^{\langle 2\rangle}\cdots f^{\langle k-2\rangle}f^{\langle k-1\rangle}}dx=\int\frac{f^{\langle k\rangle}(\ln x)}{xf^{\langle 0\rangle}(\ln x)f^{\langle 1\rangle}(\ln x)\cdots f^{\langle k-2\rangle}(\ln x)}dx$$

여기서 $\ln x=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}(\text{준식})&=\int\frac{f^{\langle k\rangle}(t)}{f^{\langle 0\rangle}(t)f^{\langle 1\rangle}(t)\cdots f^{\langle k-2\rangle}(t)}dt\\&=f^{\langle n\rangle}(t)f^{\langle n-1\rangle}(t)-f^{\langle n-1\rangle}(t)+C\\&=f^{\langle n+1\rangle}(x)f^{\langle n\rangle}(x)-f^{\langle n\rangle}(x)+C\end{aligned}$$

실전 (이화여대 2020모의)

(1) (i) $n=1$일 때, $(1+x)^1=1+1\times x$이므로 당연히 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $(1+x)^k \ge 1+kx$가 성립한다고 하면

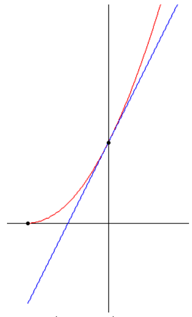
$$(1+x)^{k+1}=(1+x)(1+x)^k \ge (1+x)(1+kx)=1+(k+1)x+kx^2 \ge 1+(k+1)x$$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.

그러므로 (i)과 (ii)에 의하여 n이 자연수이고 $x \ge -1$이면 $(1+x)^n \ge 1+nx$가 성립한다.

* $y=1+nx$는 곡선 $y=(1+x)^n$ 위의 점 $(0,1)$에서의 접선이고,

$x \ge -1$일 때 곡선 $y=(1+x)^n$는 아래로 볼록이므로 그림과 같다.



$y=(1+x)^n$과
$y=1+nx$의 그래프

(2) $x \ge -1$일 때는 이미 문항 (1)에서 확인하였다.

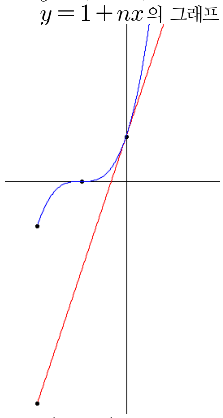
여기서는 $-2 \le x \le -1$에서 확인하자.

$f(x)=(1+x)^n-(1+nx)$ 라 하면,

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}-n=n\{(1+x)^{n-1}-1\}$

n이 3이상의 홀수이므로, $x=-2$일 때 $f'(x)=0$이고, $-2<x\le -1$이면 $f'(x)<0$이다.

따라서 $f(x) \ge f(-1)=n-1>0$이므로 $(1+x)^n \ge 1+nx$가 성립한다.



$y=(1+x)^n$과
$y=1+nx$ 의 그래프

(3) $f(x)=(1+x)^r-(1+rx)$ $(x>-1)$라 하자.

$$f'(x)=r(1+x)^{r-1}-r=r\{(1+x)^{r-1}-1\},$$

(i) $0<r<1$ 이면,

$-1<x<0$일 때 $f'(x)>0$, $f'(0)=0$, $x>0$일 때 $f'(x)<0$ 이므로

$f(x) \le f(0)=0$이다. 따라서 $(1+x)^r \le 1+rx$이 성립한다.

(ii) $r<0$ 또는 $r>1$ 이면,

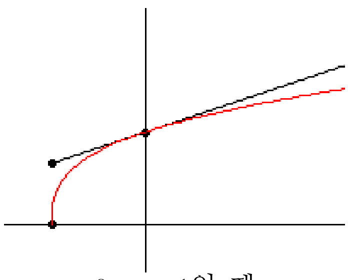
$-1<x<0$일 때 $f'(x)<0$, $f'(0)=0$, $x>0$일 때 $f'(x)>0$ 이므로

$f(x) \ge f(0)=0$이다. 따라서 $(1+x)^r \ge 1+rx$이 성립한다.

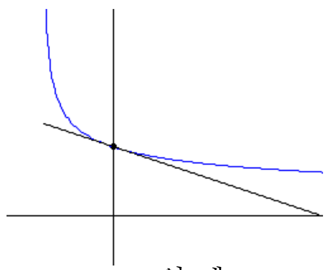
* $y=1+rx$는 곡선 $y=(1+x)^r$ $(x>-1)$위의 점 $(0,1)$에서의 접선이고,

$y''=r(r-1)(1+x)^{r-2}$이므로 $0<r<1$ 이면 $y''<0$, $r<0$ 또는 $r>1$ 이면 $y''>0$이므로

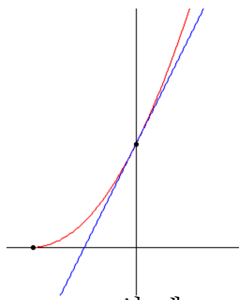
아해 그림과 같이 각각 곡선 $y=(1+x)^r$은 위로 볼록, 아래로 볼록이다.



$0<r<1$일 때



$r<0$일 때



$r>1$일 때

실전

(1) 임의의 두 양수 a_1, a_2에 대해 $\dfrac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\dfrac{\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2}{2}\ge 0$으므로 성립.

(2) $\dfrac{a_1+\cdots+a_k}{k} \ge \sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$ 가 성립한다고 가정하면

$$\frac{a_1+\cdots+a_{2k}}{2k}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+\cdots+a_{2k}}{k}\right)\ge \frac{1}{2}\left(\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}\right)\ge \frac{1}{2}2\sqrt[2k]{a_1\cdots a_{2k}}=\sqrt[2k]{a_1\cdots a_{2k}}.$$

(3) $\frac{a_1+\cdots+a_{k+1}}{k+1} \ge \sqrt[k+1]{a_1 \cdots a_{k+1}}$ 가 성립한다고 가정하면

a_{k+1}에 $\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}=A$를 대입하면 $\frac{a_1+\cdots+a_k+A}{k+1} \ge \sqrt[k+1]{a_1 \cdots a_k A}$. 즉 $\frac{kA+A}{k+1} \ge \sqrt[k+1]{a_1 \cdots a_k A}$

따라서 $A^{1-\frac{1}{k+1}} \ge (a_1 \cdots a_k)^{\frac{1}{k+1}}$이므로 양변을 $\frac{k+1}{k}$승 하면 $A \ge \sqrt[k]{a_1 \cdots a_k}$.

모의고사

(1)

$n=1,\ 2$일때 성립

$n=k\,(k \geqq 2)$일때 $(1+a)^k \geqq 1+ka$가 성립하면

$$\begin{aligned}(1+a)^{k+1} &= (1+a)^k(1+a) \\ &\geqq (1+ka)(1+a)\ (\because 1+a \geqq 0) \\ &= 1+(k+1)a+ka^2 \\ &\geqq 1+(k+1)a\end{aligned}$$

(2)

$-2 \leqq a < -1$이면 $-1 \leqq a+1 < 0$

$(1+a)^k \leqq 1$에서

$(1+a) \leqq (1+a)^{k+1}\ (\because 1+a<0)$

$1+(k+1)a \leqq 1+a \leqq (1+a)^{k+1}$

$\therefore (1+a)^{k+1} \geqq 1+(k+1)a$

(3) $S>1$이면 적당한 자연수 m에 대해

$$\frac{4}{S^{2m}} < \frac{1}{m+1} \Rightarrow S^{2m} > 4(m+1) > 4m+2$$

$$= 2(2m+1)$$

$$\Rightarrow S^{2m+1} > (2m+1)(S+1) > (2m+1)(S+1)-1$$

$$\Rightarrow -S^{2m+1} < 1+(2m+1)(-S-1)$$

$$\Rightarrow (-S)^{2m+1} < 1+(2m+1)(-S-1)$$

위의 사실을 이용하여 $a<-2$일때

$S=-(a+1)$면 $S>1$이므로

$(a+1)^{2m+1} < 1+(2m+1)a$

Note